***Лекция 7***

**Простейшие движения твердого тела**

**Поступательное движение.**

***Мгновенно-поступательным*** назовем движение тела в момент, когда угловая скорость тела обратилась в ноль

Курс лекций по ТМ А.Костарева 2011

В этом случае

(2)

То есть скорости всех точек в момент мгновенно-поступательного движения оказываются равными.

Например, в момент, когда кривошип ,, скорости точек А и В равны (Рис. 1).

**VA**

**VB= VA**

O

A

B

Рис.1

Если угловая скорость остается равной нулю в течение некоторого промежутка времени, то движение в это время называется ***поступательным.*** Например ползун В (Рис.1) все время движется поступательно

значит

Таким образом, при поступательном движении тела произвольный вектор в теле остается параллельным самому себе. При этом траектории любых двух точек А и В (годографы векторов **rA** и**rB**) одинаковы и сдвинуты на постоянный вектор **АВ** (Рис.2)**.**

A

B

Рис.3

На Рис.3 изображено колесо обозрения, кабина которого совершает круговое поступательное движение. При этом все точки кабины, в том числе точки А и В движутся по одинаковым окружностям, центры которых смещены на АВ.Это отчетливо видно на анимации

<http://www.ostralo.net/3_animations/swf/grande_roue.swf>

В общем случае движения все точки тела имеют разные скорости, поэтому термины «скорость» и «ускорение» относятся только к точке тела, а термины «угловая скорость» и «угловое ускорение» относятся только к телу.

O

**rA**

**rB**

A

B

Рис.2

Только при поступательном движении скорость можно условно назвать скоростью тела.

Дифференцируя (2), найдем, что в каждый момент времени равны и ускорения всех точек

Поступательное движение тела описывается формулами кинематики точки, поскольку все точки движутся одинаково. Как известно, движение точки в пространстве задается тремя скалярными функциями ее координат. Значит, в поступательном движении тело имеет 3 степени свободы.

**Вращательное движение.**

**Угловая скорость и угловое ускорение тела.**

Пусть тело вращается вокруг неподвижной оси z Положение тела удобно задать углом поворота тела (Рис.4)

Эта закон вращения тела. Таким образом, во вращательном движении тело имеет одну степень свободы.

Как было показано, угловая скорость **** вращающегося тела направлена вдоль оси вращения. Значит и матрица угловой скорости имеет вид:

Рис.4

y

М

**V**

h

**r**

α

ϕ

ω

**ω**

z

x

Найдем проекцию угловой скорости z.

Столбец проекций радиуса вектора **r**

(6)

cвязан с его производной

Курс лекций по ТМ А.Костарева 2011

формулой Эйлера

(7)

Получаем

(8)

Таким образом, во вращательном движении угловая скорость есть скорость изменения угла поворота тела. Отсюда название угловой скорости. ***Вектор угловой скорости тела направлен так, что правый винт, вращающийся с телом, движется вдоль оси вращения.***

<http://www.upscale.utoronto.ca/GeneralInterest/Harrison/Flash/ClassMechanics/RotatingWheel/RotateWithOmega.html>

Курс лекций по ТМ А.Костарева 2011

В свободном движения угловая скорость тела выражается значительно более сложным образом и не через один, а через три угла Эйлера (см. Сферическое движение тела).

***Угловым ускорением тела*** называется вектор

Поскольку годографом вектора является сама ось вращения, то угловое ускорение тоже будет направлено вдоль оси вращения. Дифференцируя (8) по времени, находим:

Таким образом, проекция углового ускорения на ось z равна второй производной от закона вращения.



Поскольку угловое ускорение также как и угловая скорость является аксиальным вектором, то его тоже снабжают дуговой стрелкой по правилу правого винта.

Ускоренным следует назвать вращение тела с возрастающей по модулю угловой скоростью. Очевидно, что оно будет иметь место при

сонаправленных векторах угловой скорости и углового ускорения (левый Рис.5). Таким образом, вращение будет ускоренным при и замедленным при

Курс лекций по ТМ А.Костарева 2011

**Скорость и ускорение точки вращающегося тела**

Так как радиус-вектор точки М является вектором в теле, то скорость точки вращающегося тела находится по формуле Эйлера

ω

z

**VA**

A

Рис.6

Матричная запись этой формулы в любой из систем координат

(12)

В соответствии с Рис.4 модуль скорости точки V равен :

Видим, что скорость точки линейно зависит от расстояния h до оси вращения. Картина распределения скоростей на прямой, перпендикулярной оси представлена на Рис.6

Найдем ***ускорение*** точки вращающегося тела. Дифференцируя (11) по времени, найдем

Таким образом, ускорение точки вращающегося тела имеет две составляющие (Рис.7).

Составляющая

являетсякасательным ускорением, но здесь она называется ***вращательным ускорением*** точки. Специальное название введено потому, что не во всех движениях тела произведение  направлено по касательной к траектории точки (см сферическое движение тела). Вращательное ускорение точки направлено в сторону дуговой стрелки вектора углового ускорения **.** По модулю

Вторая составляющая

устремлена к оси вращения, независимо от направления вращения (вектора ****), и поэтому называется ***осестремительным ускорением*** точки. Действительно, векторы и изменяют направление одновременно, поэтому их векторное произведение не меняет своего направления при перемене направления вращения тела. По модулю

Вычислим модуль полного ускорения Wи угол который оно составляет с направлением на ось:

Видим, что модуль ускорения точки линейно зависит от расстояния h точки до оси вращения, а угол  одинаков для всех точек тела.

Теперь нетрудно изобразить картину распределения ускорений во вращающемся теле Поскольку на прямых, параллельных оси вращения скорости все время одинаковы, то одинаковы и ускорения. Значит во всех плоскостях, перпендикулярных оси вращения, картины распределения и скоростей и ускорений одинаковы. Одна из них изображена на Рис.8:

ε

z

**WA**

A

Рис.8

β

Вычислим проекции ускорения точки М (Рис.7) на подвижные оси

матричным способом. Дифференцируя (12) по времени получим:

Курс лекций по ТМ А.Костарева 2011

Здесь через обозначена кососимметричная матрица углового ускорения

Формула (18) справедлива как в неподвижной системе координат, так и координатах, связанных с телом, где она чаще всего и применяется.

**Плоское движение тела**

**Закон движения.**

**Плоская фигура.**

Движение тела называется плоским, если скорости всех его точек остаются параллельными некоторой неподвижной плоскости. Примером такого движения может служить качение цилиндра по плоскости (Рис.9). Скорости всех точек цилиндра параллельны плоскости П**.**

П

B

A

**VA**

**VB**

**ω**

S

**n**

Рис.9

Умножив формулу распределения скоростей для произвольных точек тела А и В (А- полюс)

скалярно на орт **n** нормали к плоскости П, получим:

Поскольку – произвольный вектор в теле , то

Таким образом, в плоском движении тела вектор угловой скорости параллелен орту **n** и перпендикулярен плоскости П.

Из теоремы о распределении скоростей известно, что скорости точек прямой, параллельной , одинаковы. Поскольку не изменяет своего направления, то скорости одинаковы все время. Значит, одинаковы и ускорения точек на прямых , параллельных . Поэтому нет смысла изучать распределение скоростей и ускорений во всем теле. Достаточно понять, как они распределены в каком-нибудь его сечении S, параллельном плоскости движения П. Такое сечение называется ***плоской фигурой***. Во всех параллельных сечениях распределения скоростей и ускорений будет аналогичным.

Обычно плоскую фигуру располагают в плоскости чертежа ху. Положение фигуры на плоскости определяется тремя координатами - функциями времени:

A

ϕ

x’

y

x

yA

xA

Рис.10

Они являются законом плоского движения тела, которое, таким образом, имеет три степени свободы.

Курс лекций по ТМ А.Костарева 2011